×46×

ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1977

OPTION P'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que l'on ait $a < b$. E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p désigne le sous-espace vectoriel de E constitué par les fonctions polynômes de degré $\leqslant p$. On emploiera éventuellement le mot "polynôme" dans le sens de "fonction polynôme".

On pourra utiliser, sans le justifier, le résultat suivant : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente de toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\| a_n \|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

I

I - 1°/ A tout élément g de E on associe le nombre

$$\| g \| = \sup_{x \in [a,b]} | g(x) | .$$

Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur E.

Dans tout le problème, E sera muni de cette norme.

I - 2°/ Soient p un élément de $\mathbb{N}$ et f un élément de E. On pose

$$d = \inf_{g \in F_p} \| g - f \| .$$

Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F_p, convergeant vers un élément de F_p et telle que la suite $(\| g_n - f \|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers d.

En déduire qu'il existe un élément P de F_p tel que l'on ait

$$\| P - f \| = d .$$

On dira que P est un *polynôme de meilleure approximation de f dans* F_p.

.../...

II

Dans cette partie, on étudie un exemple. On prend $a = 0$, $b = 1$; et f est l'application $x \longmapsto x^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

A tout élément (s, t) de $\mathbb{R}^2$ on associe l'élément $g_{s,t}$ de F_1 défini par $g_{s,t}(x) = sx + t$. On désigne par φ l'application

$$s \longmapsto \inf_{t \in \mathbb{R}} \| g_{s,t} - f \|$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II - 1°/ Montrer que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(2 - s) = \varphi(s) .$$

II - 2°/ Expliciter $\varphi(s)$ et tracer le graphe de φ.

II - 3°/ En utilisant cette étude de φ, montrer que le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1 est unique et expliciter ce polynôme.

III

Dans cette partie, on revient au cas général. Etant donnés un élément p de $\mathbb{N}$ et et un élément f de E, on se propose de montrer qu'il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p et d'en donner une caractérisation.

III - 1°/ Dans quel cas a-t-on $d = 0$? Montrer que, dans ce cas, il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p et indiquer quel est ce polynôme.

III - 2°/ Dans toute la suite de cette partie, on suppose $d \neq 0$ et l'on désigne par P un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p.

On pose

$$\alpha = \sup_{x \in [a,b]} [P(x) - f(x)] , \qquad \beta = \inf_{x \in [a,b]} [P(x) - f(x)] .$$

On désigne par A_1 l'ensemble des éléments x de $[a, b]$ tels que l'on ait $P(x) - f(x) = d$ et par A_{-1} l'ensemble des éléments x de $[a, b]$ tels que l'on ait $P(x) - f(x) = -d$.

Montrer que l'on a $\alpha = d$ (pour cela, on pourra, en considérant le polynôme $P + \frac{d - \alpha}{2}$, montrer que l'on aboutit à une contradiction si l'on suppose $\alpha \neq d$). Montrer aussi que l'on a $\beta = -d$.

Montrer que A_1 et A_{-1} ne sont pas vides.

III - 3°/ Montrer qu'il existe une suite finie $(x_0, \ldots, x_m)$ d'éléments de $[a, b]$, strictement croissante, telle que l'on ait $x_0 = a$ et $x_m = b$ et que, quels que soient $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ et $y \in [x_{i-1}, x_i]$, on ait

$$|[P(x) - f(x)] - [P(y) - f(y)]| \leqslant \frac{d}{2} .$$

III - 4°/ On choisit une suite $(x_0, \ldots, x_m)$ satisfaisant aux conditions précédentes.

Montrer que, quels que soient les éléments i et j de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $[x_{i-1}, x_i] \cap A_1$ et $[x_{j-1}, x_j] \cap A_{-1}$ ne soient pas vides, j est différent de i, de $i+1$ et de $i-1$.

Dans la suite, pour $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, on désigne par $\mathcal{J}_\varepsilon$ l'ensemble des intervalles de la forme $[x_{i-1}, x_i]$ (i étant un élément de $\{1, \ldots, m\}$) dont l'intersection avec A_ε n'est pas vide et par I l'ensemble des éléments i tels que $[x_{i-1}, x_i]$ appartienne à $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_{-1}$.

Montrer que le nombre r d'éléments de I est au moins égal à 2 et que l'on a $m \geqslant 3$.

III - 5°/ On pose

$$I = \{i_1, \ldots, i_r\} ,$$

la suite $(i_1, \ldots, i_r)$ étant strictement croissante, et, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $B_j = [x_{i_j - 1}, x_{i_j}]$.

Montrer qu'il existe une suite $((j_1, \varepsilon_1), \ldots, (j_q, \varepsilon_q))$ d'éléments de $\{1, \ldots, r\} \times \{-1, +1\}$ et une seule, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) la suite $(j_1, \ldots, j_q)$ est strictement croissante et l'on a $j_q = r$;

b) si l'on pose $j_0 = 0$, alors, quels que soient les entiers k et j tels que l'on ait $1 \leqslant k \leqslant q$ et $j_{k-1} < j \leqslant j_k$, B_j appartient à $\mathcal{J}_{\varepsilon_k}$;

c) quel que soit l'entier k tel que l'on ait $k \geqslant 1$ et $k \leqslant q-1$, ε_k et ε_{k+1} sont de signescontraires

Montrer que l'on a $q \geqslant 2$.

III - 6°/ Pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$, on pose

$$C_k = \bigcup_{j_{k-1} < j \leqslant j_k} B_j .$$

.../...

Montrer que, quel que soit $k \in \{1, \ldots, q-1\}$, il existe $u \in [a,b]$ tel que, quels que soient $x \in C_k$ et $y \in C_{k+1}$, on ait $x < u < y$.

III - 7°/ On choisit, pour tout $k \in \{1, \ldots, q-1\}$, un élément u satisfaisant à la condition précédente, et on le note u_k. On désigne par Q la fonction polynôme

$$x \longmapsto (x - u_1) \ldots (x - u_{q-1}) .$$

Montrer que $(P - f)Q$ ne s'annule pas sur $C_1 \cup \ldots \cup C_q$ et garde un signe constant sur cet ensemble.

III - 8°/ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\| P + \lambda Q - f \| < d$. Que peut-on en déduire sur q ?

Montrer qu'il existe une suite $(y_1, \ldots, y_{p+2})$ d'éléments de $[a, b]$, strictement croissante, et un élément η de $\{-1, +1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, p+2\}$, y_i appartienne à $A_{(-1)^i \eta}$.

III - 9°/ Soit P_1 un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p. Montrer que $\frac{1}{2}(P + P_1)$ en est un aussi et que, quel que soit $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, l'ensemble des éléments x de $[a, b]$ tels que l'on ait $\frac{1}{2}[P(x) + P_1(x)] - f(x) = \varepsilon d$ est contenu dans A_ε.

Montrer alors que l'on a $P_1 = P$.

III - 10°/ Soit R un élément de F_p. On suppose qu'il existe une suite $(z_1, \ldots, z_{p+2})$ d'éléments de $[a, b]$, strictement croissante, et un élément ζ de $\{-1, +1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, p+2\}$, on ait $R(z_i) - f(z_i) = (-1)^i \zeta \| R - f \|$.

Montrer que l'on a $R = P$.

IV

IV - 1°/ Pour tout élément f de E, expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0.

IV - 2°/ Dans cette question, on reprend l'exemple de la partie II : $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x^2$.

A partir des résultats énoncés dans la partie III et sans utiliser les résultats obtenus dans la partie II, expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1.

IV - 3°/ Dans cette question, on se place dans le cas $a = -b$ (b étant > 0) ; et f est l'application $x \longmapsto |x|^3$ de $[-b, +b]$ dans $\mathbb{R}$.

Expliciter les polynômes de meilleure approximation de f dans F_1 et F_2.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail